Zum kollektiven Anteil des Plasma-Mikrofeldes

K. HUNGER und R.W. LARENZ

Lehrstuhl für Astrophysik der Technischen Universität Berlin
und Institut für Theoretische Physik der Universität Düsseldorf

(Z. Naturforsch. **23a**, 1488—1498 [1968]; eingegangen am 17. Juli 1968)

The Holtsmark microfield evaluation is rediscussed. It is shown that in the usual computation of the Fourier transform a term is neglected which has the dimension of a dipole moment density. This term occurs only for long range forces (here Coulomb ones) and remains undetermined in the limit of an infinitely large system without interaction. Furthermore, it is sensitive to deviations from ergodicity. The true microfield distribution results as a Holtsmark distribution centered at the generally nonvanishing far field. As the distribution of the latter is Gaussian the complete distribution results as a convolution of the Holtsmark distribution with that of the far field. The parameter of the Gaussian far field distribution is computed for a non interacting plasma consisting of N charges, by taking into account explicitely the collective field of space charge fluctuations. The formulae arrived at with respect to the microfield as well as the micropotential suggest to perform numerical computer experiments (HUNGER, LARENZ and WILKE, to be published). For an interacting plasma, the far field is obtained qualitatively. It agrees with the microfield of HUNGER and LARENZ (1961). The far field dominates the Holtsmark nearest neighbour field at plasma conditions $kT/e^2 n^{1/3} > 1$.

1. Einleitung und Übersicht

Abweichend von den bisherigen zahlreichen Arbeiten zum Mikrofeld-Problem (Literaturzusammenstellung siehe z. B. WEISE [1]) war in einer Arbeit [2] vor einigen Jahren für typische Plasmabedingungen ($k T/e^2 n^{1/3} > 1$) mit kollektiver Wechselwirkung ein stark temperaturabhängiges Mikrofeld hergeleitet worden, welches außerdem zum Unterschied gegen die bekannte Holtsmark-Verteilung der elektrischen Mikrofeldstärke einer Gauß-Verteilung gehorchen sollte. Zur experimentellen Prüfung der Mikrofeldtheorien sind inzwischen Modellrechnungen mit Hilfe einer elektronischen Rechenanlage ausgeführt worden, über die bereits einige Mitteilungen herausgegeben wurden [3,4,5,6]. Zusammenfassend wird darüber in dieser Zeitschrift in einer folgenden Arbeit berichtet [7]. Auf der anderen Seite ist für ein kaltes Plasma ($k T/e^2 n^{1/3} < 1$), welches durch eine Hochfrequenzentladung erzeugt wurde, mit Hilfe des Studiums der Stark-Verbreiterung von Wasserstofflinien von VIDAL [8] gezeigt worden, daß für solche Plasmen mit sehr guter Näherung die Holtsmark-Verteilung realisiert ist, die bekanntlich im wesentlichen das Feld des dem Aufpunkt nächstbenachbarten Ladungsträgers wiedergibt.

In der vorliegenden Arbeit soll nun der Übergang vom Holtsmarkschen zum Gaußschen Verhalten der Feldverteilungsfunktion diskutiert werden, da dieser Übergang in der Arbeit [2] außer acht gelassen worden war. Das Gaußsche Verhalten entsteht durch das kollektiv wirkende Feld weit entfernter Ladungsträger (mit Abständen von der Größenordnung der Debye-Länge und darüber), welches in der ursprünglichen HOLTSMARKschen Arbeit [9] und in allen späteren Arbeiten beim Grenzübergang zu beliebig ausgedehnten Plasmen übersehen worden ist, obwohl die Existenz gewisser Schwierigkeiten hierbei im Fall des weitreichenden Coulomb-Feldes aus der Potentialtheorie bekannt war. Auf diese Schwierigkeiten haben insbesondere NEUMANN [10] und SEELIGER [11] Ende des vorigen Jahrhunderts hingewiesen. Auf Grund der Eigenschaften der Holtsmark-Verteilung hatte DEBYE [12] gleich nach Bekannt-

[1] K. WEISE, Z. Physik. **183**, 36 [1965].
[2] K. HUNGER u. R. W. LARENZ, Z. Physik **163**, 245 [1961].
[3] K. HUNGER, R. W. LARENZ u. K. H. WILKE, Spec. Report Smithonian Inst. Astrophys. Obs. Nr. 174, 61 [1965].
[4] K. HUNGER, R. W. LARENZ u. K. H. WILKE, Z. Naturforsch. **20a**, 158 [1965].
[5] K. HUNGER, R. W. LARENZ u. K. H. WILKE, Proc. 7th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Vol. II, Beograd 1966, p. 29.
[6] K. H. WILKE, Z. Naturforsch. **23a**, 761 [1968].
[7] K. HUNGER u. R. W. LARENZ, Z. Naturforsch. in Vorbereitung.
[8] C. R. VIDAL, Z. Naturforsch. **19a**, 947 [1964].
[9] J. HOLTSMARK, Ann. Phys. **58**, 577 [1919].
[10] C. NEUMANN, Über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkung. Verlag Teubner, Leipzig 1896.
[11] H. SEELIGER, Astron. Nachr. **137**, 129 [1895].
[12] P. DEBYE, Phys. Z. **21**, 178 [1920].

werden derselben festgestellt, daß mit Hilfe dieser Verteilung nicht alle einschlägigen Phänomene adäquat beschrieben werden können.

Es wird im Abschnitt 2 gezeigt, an welcher Stelle der bekannten Holtsmarkschen Rechnung bisher übersehene mathematische Komplikationen einsetzen, die dazu zwingen, das Fernfeld der Ladungsträger genauer zu untersuchen. Hierbei ergibt sich außerdem, daß Variable mit der typischen Eigenschaft des Coulomb-Feldes, nämlich der großen Reichweite, sehr empfindlich gegen beliebig kleine Abweichungen von dem in der statistischen Mechanik üblicherweise vorausgesetzten ergodischen Verhalten der betrachteten Systeme sind. Im Abschnitt 3 wird dann eine Rechenmethode angegeben, welche die Schwierigkeiten beim Grenzübergang zu Plasmen beliebiger Ausdehnung vermeidet und der physikalischen Realität einer im Mittel gleichmäßigen Ladungsträgerverteilung besser angepaßt ist. Dabei zeigt sich, daß die Mikrofeldverteilung für einen unbesetzten Aufpunkt sich grundsätzlich als eine Faltung einer den nächsten Ladungsträger berücksichtigenden Holtsmark-Verteilung mit einer das Fernfeld wiedergebenden Gauß-Verteilung darstellt. Weiter zeigt sich, daß zur näheren Charakterisierung des Fernfeldes die Kenntnis der weiträumigen elektrischen Raumladungsschwankungen erforderlich ist, denn durch die Raumladungen äußert sich die kollektive Wirkung weit entfernter atomarer Ladungsträger. Daher wird im Abschnitt 4 für ein aus N Teilchen bestehendes endlich ausgedehntes Plasma ohne Wechselwirkung die Verteilungsfunktion der räumlichen Dimensionen von Raumladungsbereichen ermittelt und daran anschließend für ein solches Plasma das mittlere Fernfeldquadrat, das mittlere Dipolmomentdichtenquadrat, welches in einem gewissen Zusammenhang mit dem Fernfeld steht, sowie das mittlere Potentialquadrat berechnet. Diese Rechnungen werden besonders auch im Hinblick auf die schon erwähnten elektronischen Experimente ausgeführt, da sie die Abhängigkeit der Fernfeldgrößen von der Gesamtteilchenzahl N liefern, so daß beurteilt werden kann, inwieweit mit den heute zur Verfügung stehenden Computern eine experimentelle Nachprüfung der Theorien möglich ist.

Wie bereits gesagt, werden die Betrachtungen dieser Arbeit ohne explizite Berücksichtigung der Wechselwirkung durchgeführt, um der Klarheit halber alle Komplikationen zu vermeiden, die sich bei Einführung einer allgemeinen Energie-Verteilungsfunktion ergeben könnten. Gleichwohl lassen sich die hier gewonnenen Ergebnisse mit Hilfe einfacher Überlegungen auch auf das Plasma mit Wechselwirkung übertragen. Dies geschieht im abschließenden Abschnitt 5. Man erhält wiederum die aus[2] bekannte Temperaturabhängigkeit des Fernfeldes, welches für $k\,T/e^2 n^{1/3} > 1$ das Holtsmarksche Nahfeld überwiegt, womit die Mikrofeldverteilung in die kanonische Verteilung der elektrostatischen Energie gerechnet pro Elementarvolumen übergeht.

2. Diskussion des Grenzübergangs zum beliebig ausgedehnten Plasma in der Holtsmark-Theorie und daraus folgende Konsequenzen

Wenn N Ladungsträger keinerlei Beschränkung in ihrem Aufenthaltsort innerhalb eines sphärischen Volumens $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ unterliegen, bestimmt sich nach Holtsmark[9] die Wahrscheinlichkeitsverteilung $W(\boldsymbol{E})$ des Mikrofeldes im Kugelzentrum als Aufpunkt in bekannter Weise durch

$$W(\boldsymbol{E}) = \underset{(N)}{\int \dots \int} \delta\left(\sum \frac{e_m \boldsymbol{r}_m}{r_m^3} - \boldsymbol{E}\right) \prod_{m=1}^{N} \frac{\mathrm{d}V_m}{V} \tag{1}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k} \exp\{-i\,\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}\} \prod_{m=1}^{N} \int \exp\left\{\frac{i e_m \boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_m}{r_m^3}\right\} \frac{\mathrm{d}V_m}{V}$$

Setzt man für die δ-Funktion ihre Fourier-Darstellung ein, wie in (1) gleich geschehen, so reduziert sich das Problem auf die Ermittlung der Fourier-Transformierten

$$f_N(k) = \prod_{m=1}^{N} f_m(k), \quad k = |\boldsymbol{k}| \tag{2}$$

$$\text{mit } f_m(k) = \frac{3}{2\,R^3} \int_0^R \int_{\varepsilon_m \to 0}^{\pi} \exp\left\{\frac{i k e_m \cos\vartheta}{r^2}\right\} \cdot r^2\,\mathrm{d}r \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta. \tag{3}$$

Da in (3) die Winkelintegration sehr einfach ist, wird diese üblicherweise stets sogleich über das Intervall $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$ ausgeführt, ohne zu prüfen, ob dies unter allen Umständen zulässig ist. Hier soll nun eine Vertauschung der Operationen vorgenommen werden, derart daß zunächst die radiale Integration ausgeführt und dann anschließend der Grenzübergang $R, V, N \to \infty$ zusammen mit der Winkelintegration betrachtet wird, wobei aus Vorsichtsgründen zunächst die untere Integrationsgrenze $\vartheta = \varepsilon_m$ gesetzt worden ist. Die radiale Integration ergibt

$$f_m(k) = \int_{\varepsilon_m}^{\pi} \frac{\sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta}{2} \left\{ \left(1 + \frac{2\,i\,k\,e_m \cos\vartheta}{R^2}\right) \exp\left(\frac{i k e_m \cos\vartheta}{R^2}\right) - \frac{\sqrt{2\pi}\,k^{3/2}}{R^3} |e_m \cos\vartheta|^{3/2} \cdot (1 + i \cdot \operatorname{sgn}(e_m \cos\vartheta)) + O(R^{-4}) \right\} \tag{4}$$

und damit für $R \to \infty$

$$f_m(k) \to \int_{\varepsilon_m}^{\pi} \frac{\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}{2} \frac{1}{R^3} \left\{ 1 - \frac{1}{R^3} \left[-3\,i\,k\,e_m\,R\cos\vartheta + \sqrt{2\pi}\,k^{3/2} \,|e_m\cos\vartheta|^{3/2} \cdot (1 + i \cdot \operatorname{sgn}(e_m \cos\vartheta)) \right] \right\}. \tag{5}$$

Wird jetzt die Winkelintegration ausgeführt, so kann sie im 1., 3., und 4. Summanden des Integranden von (5) unbedenklich sofort von 0 bis π erstreckt werden, im 2. Summanden offenbar jedoch ohne nähere Diskussion nicht. Man erhält also unter Benutzung von $1 - \cos^2\varepsilon \cong \varepsilon^2$

$$f_m(k) \to 1 - \frac{1}{R^3} \left(\tfrac{3}{4}\, i\,k\,e_m\, R\, \varepsilon_m^2 + \tfrac{2}{5} \sqrt{2\pi}\, k^{3/2}\, |e_m|^{3/2}\right). \tag{6}$$

In (6) ist das letzte Glied in der Klammer der bekannte Holtsmarksche Term $\sim R^0$; zusätzlich erscheint aber additiv daneben ein Term $\sim i\,R\,\varepsilon_m^2$, der im allgemeinen für $R \to \infty$ einen unbestimmten Wert hat, was sich zeigt, wenn man

$$\varepsilon_m^2 \sim R^{-\gamma_m} \quad \text{für} \quad 0 < \gamma_m < 1 \tag{7}$$

gegen Null gehen läßt, wie dies zu verlangen ist, damit dem Ladungsträger e_m alle Orte im Volumen V zugänglich sind. Der durch die Einführung von ε_m dem Teilchen e_m zunächst nicht zugängliche relative Volumenbereich $\Delta V_m / V$ ergibt sich zu

$$\frac{\Delta V_m}{V} = \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon_m} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{2}(1 - \cos\varepsilon_m) \cong \frac{\varepsilon_m^2}{4} \sim R^{-\gamma_m} \tag{8}$$

und geht, wie verlangt mit $R \to \infty$ gegen Null. Der Term

$$\frac{3}{4}\, i\,k\,e_m\, R\,\varepsilon_m^2 = 3\,i\,k\,e_m \frac{\Delta V_m}{V} \sim R^{1-\gamma_m} \tag{9}$$

kann also gegenüber dem Holtsmarkschen Term betragsmäßig jeden beliebigen Wert haben, womit die bekannten potentialtheoretischen Schwierigkeiten des Coulomb-Feldes im Falle gegen ∞ strebender Medienausdehnung zum Ausdruck kommen. Das Ausschließungsvolumen ΔV_m wird natürlich im Falle der Wechselwirkung mit der Teilchenkorrelation zusammenhängen.

Zu der vorstehenden Betrachtung lassen sich natürlich leicht Varianten angeben, die zum gleichen Resultat führen. Weiter überzeugt man sich durch analoge Rechnung leicht, daß beim Grenzübergang $R \to \infty$ immer dann die hier aufgezeigten Probleme auftreten, wenn es sich um ein weitreichendes Kraftfeld gemäß einem Gesetz r^{-p} mit $p < 3$ handelt. Dies hat zur Folge, daß in diesen Fällen mit dem Auftreten von Fernfeldeffekten zu rechnen ist. Wie die Diskussion im Zusammenhang mit (8) zeigt, bedeutet dies insbesondere, daß Phasenvariable, die wie das Plasma-Mikrofeld von solchen Feldgrößen abgeleitet werden, eine beträchtliche Empfindlichkeit gegen infinitesimale Abweichungen von der Voraussetzung vollergodischen Verhaltens der betrachteten Systeme aufweisen müssen. Da reale Systeme schon auf Grund der endlichen Lebensdauer niemals vollergodisch sein können, hat dies natürlich entscheidende Konsequenzen für die Brauchbarkeit von Ergebnissen, soweit diese unter Voraussetzung der Ergodizität im Falle solcher gegen Abweichungen davon empfindlicher Variablen gewonnen wurden. Der Verlust des Fernfeldanteils in den bisherigen Mikrofeldarbeiten ist ein Beispiel hierfür.

Der zum Holtsmarkschen Term hinzugetretene Ausdruck $\frac{3}{4} i k e_m R \varepsilon_m^2$ oder wieder allgemeiner geschrieben $-3 i k e_m R \langle\cos\vartheta_m\rangle$ hat die Dimension eines Dipolmoments; unter Beachtung des Vorfaktors R^{-3} scheint also der Fernfeldanteil in Verbindung mit einer Dipolmomentdichte der betrachteten Ladungsträgerverteilung zu stehen. Daß dies in der Tat so ist, wird im Anhang I zu dieser Arbeit gezeigt.

Geht man nun für $N = \frac{4}{3}\pi n R^3 \to \infty$ mit $n = N/V$ als Teilchendichte in bekannter Weise zur Exponentialfunktion für die Fourier-Transformierte $f(k)$ über, so hat man mit $|e_m| = e$

$$f(k) = \prod_{m=1}^{N\to\infty} f_m(k) = \exp\Big\{4\pi\,i\,n\,k\,R \Big\langle \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N\to\infty} e_m \cos\vartheta_m \Big\rangle - \frac{16\,\pi^{3/2}}{15\sqrt{2}}\, e^{3/2}\, n\, k^{3/2} \Big\}, \tag{10}$$

wobei im Imaginärteil des Exponenten die Divergenz für $R \to \infty$ infolge Auftretens einer Summe von Gliedern beiderlei Vorzeichens zwar gemildert erscheint, jedoch zu beachten ist, daß eine Summe von unabhängigen unbestimmten Größen natürlich unbestimmt bleibt. Die Tatsache, daß der Fernfeldterm als Imaginärteil des Exponenten auftritt, der bei der k-Integration gemäß (1) der Feldstärke $\boldsymbol{E}$ zugeschlagen werden kann, bedeutet im Ergebnis, daß $W(\boldsymbol{E})$ als eine Holtsmark-Verteilung erscheint, die um einen unbestimmten Fernfeldwert zentriert ist. Die kollektiv zustande kommenden Fernfeldwerte schwanken aber ihrerseits statistisch, so daß insgesamt eine verbreiterte Feldverteilung resultiert. Ohne nähere Untersuchung kann über den Fernfeldterm zunächst nichts weiteres ausgesagt werden, jedoch wird zu vermuten sein, daß der Ausdruck $R\left\langle\frac{1}{N}\sum e_m \cos\vartheta_m\right\rangle$ im Falle des realen Plasmas mit Wechselwirkung die Größenordnung einer mit der Elementarladung e multiplizierten charakteristischen Plasmalänge, etwa der Debye-Länge besitzen wird, womit hier bereits der Anschluß an das Ergebnis eines temperaturabhängigen Mikrofeldes gemäß der unter [2] zitierten Arbeit gegeben ist.

Im nächsten Abschnitt wird nun eine Integrationsmethode angegeben, welche die hier aufgezeigten Unbestimmtheiten für $R\to\infty$ und den damit unbestimmten Imaginärteil der Fourier-Transformierten vermeidet; wiederum kommt es dabei wesentlich auf die Reihenfolge der Prozesse an. Es wird sich zeigen, daß die Fernfeldbeiträge einer Gauß-verteilung gehorchen.

3. Die Mikrofeldverteilung als Faltung einer Holtsmark- und einer Gauß-Verteilung

Im realen Plasma sind die Ladungsträger im Mittel mit gleichmäßiger Dichte verteilt. Es liegt daher nahe, eine Ordnung der Ladungsträger nach ihren mittleren Abständen vom Aufpunkt vorzunehmen, wobei dann später diese Ordnung permutiert werden kann.

Betrachtet man den Ausdruck

$$W(V_m)\,\mathrm{d}V_m = n\,\mathrm{d}V_m\,(n\,V_m)^{m-1}\cdot\frac{e^{-n V_m}}{(m-1)!}$$
$$\to 4\,\pi\,n\,r_m^2\,\mathrm{d}r_m\left(\frac{4\,\pi\,n}{3}\,r_m^3\right)^{m-1}\cdot\frac{\exp\{-(4\,\pi\,n/3)\,r_m^3\}}{(m-1)!}\,, \tag{11}$$

so gibt er bekanntlich die normierte Wahrscheinlichkeit an, in einem Volumen $\mathrm{d}V_m$ nur m Teilchen zu finden, wenn deren mittlere Dichte n ist. Andererseits gibt er auch die Wahrscheinlichkeit an, ein m-tes Teilchen in $\mathrm{d}V_m$ in der Umgebung des aus (11) ersichtlichen wahrscheinlichsten Abstandes

$$r_{0\mathrm{m}} = \left(\frac{3\,m-1}{4\,\pi\,n}\right)^{1/3} \cong \left(\frac{3\,m}{4\,\pi\,n}\right)^{1/3}$$

anzutreffen. Ersichtlich gilt ferner $\langle V_m\rangle = m/n$ sowie bei Permutation der Teilchennumerierung

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N\to\infty} n\,\mathrm{d}V\,(n\,V)^{m-1}\cdot\frac{e^{-nV}}{(m-1)!} = \frac{n\,\mathrm{d}V}{N} = \frac{\mathrm{d}V}{V}\,. \tag{12}$$

Damit schreibt sich jetzt die Mikrofeldverteilung [13]

$$W(\boldsymbol{E}) = \underset{(N)}{\int\cdots\int}\delta\left(\sum_{m=1}^{N}\frac{e_m\,\boldsymbol{r}_m}{r_m^3}-\boldsymbol{E}\right)\cdot\prod_{m=1}^{N\to\infty}\frac{(n\,V_m)^{m-1}}{(m-1)!}\cdot e^{-nV_m}\cdot n\,\mathrm{d}V_m\,, \tag{13}$$

wobei man noch die spätere Permutation der Teilchennumerierung im Auge zu behalten hat, die bei Betragsgleichheit aller e_m jedoch nichts Neues bringt. Führt man diese Permutation in (13) gemäß (12) vor den Integrationen aus, so geht (13) wieder in den Holtsmarkschen Ansatz über.

Nach Einführung der δ-Funktion in der Fourier-Schreibweise können jetzt alle radialen Integrationen ohne Schwierigkeiten sogleich bis ∞ erstreckt werden. Für $m=1$ hat man zunächst das Integral

$$f_1(k) = \int_0^\infty\int_0^\pi \exp\left\{\frac{i\,k\,e_1\cos\vartheta}{r^2}-\frac{4\,\pi\,n}{3}\,r^3\right\}\cdot 2\,\pi\,n\,r^2\,\mathrm{d}r\,\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \tag{14}$$
$$= \frac{1}{k\,e_1}\int_0^\infty \sin\frac{k\,e_1}{r^2}\cdot e^{-(4\pi n/3)r^3}\cdot 4\,\pi\,n\,r^4\,\mathrm{d}r\,.$$

Durch partielle Integration geht dies über in

$$f_1(k) = \left[\left(\frac{4\,\pi\,n\,r^5}{5\,k\,e_1}\sin\frac{k\,e_1}{r^2}-\frac{2}{5}\cos\frac{k\,e_1}{r^2}\right)\cdot e^{-(4\pi n/3)\,r^3}\right]_{r=0}^{\infty}$$
$$+\frac{4}{5}\,k\,e_1\int_0^\infty\frac{dr}{r^3}\sin\frac{k\,e_1}{r^2}\cdot e^{-(4\pi n/3)r^3}+\frac{(4\,\pi\,n)^2}{5\,k\,e_1}\int_0^\infty \mathrm{d}r\,r^7\sin\frac{k\,e_1}{r^2}\cdot e^{-(4\pi n/3)r^3}\,. \tag{15}$$

[13] Für $m=1$ allein führt dieses Verfahren zu der bekannten Verteilung des allein von der nächstbenachbarten Ladung herrührenden Feldes. Siehe z. B. A. UNSÖLD, Physik der Sternatmosphären, Springer-Verlag, Berlin 1955, S. 307/310.

Der ausintegrierte Anteil liefert keinen Beitrag. Vom verbleibenden 1. Integral spaltet man zweckmäßig einen Teil ab, der statt der Exponentialfunkion den Faktor $1-(4\pi n/3)r^3$ erhält. Im restlichen Teil sowie im 2. Integral kann die sin-Funktion entwickelt werden, wobei für die zu ermittelnde Fourier-Transformierte nur die niedrigsten Potenzen von k von Interesse sind, hier also k^2. Dabei geht (15) über in

$$f_1(k)$$
$$= \frac{4}{5}\int_0^\infty \mathrm{d}r\left\{k e_1 \sin\frac{k e_1}{r^2}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{4\pi n}{3}\right)-k^2 e_1^2\left(\frac{1}{r^5}-\frac{4\pi n}{3r^2}\right)+\left(k^2 e_1^2\left(\frac{1}{r^5}-(2\pi n)^2\frac{r}{6}\right)+(2\pi n)^2 r^5\right)e^{-(4\pi n/3)r^3}\right\}$$
$$= \frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\cos\frac{k e_1}{r^2}-\frac{4\pi n}{3}k e_1 r \sin\frac{k e_1}{r^2}+\frac{k^2 e_1^2}{r}\left(\frac{1}{4r^3}-\frac{4\pi n}{3}\right)-\left(\frac{k^2 e_1^2}{r}\left(\frac{1}{4r^3}-\pi n\right)+\pi n r^3+\frac{3}{4}\right)e^{-(4\pi n/3)r^3}\right]_{r=0}^{\infty}$$
$$-\frac{4\pi n}{3}\,\frac{8}{5}\,k^2 e_1^2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2}\cos\frac{k e_1}{r^2}+\left(\frac{4\pi n}{3}\right)^{4/3}\cdot\frac{k^2 e_1^2}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{-1/3} e^{-x} \tag{16}$$

und unter Beachtung der Permutation der Ladungsnumerierung

$$f_1(k) = 1-\frac{16\pi^{3/2}}{15\sqrt{2}}\,n\langle|e|^{3/2}\rangle k^{3/2}+\left(\frac{4\pi n}{3}\right)^{4/3}\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{\langle e^2\rangle}{2}k^2. \tag{17}$$

Es ergibt sich also genau der bekannte Holtsmarksche Term $\sim k^{3/2}$ und außerdem ein Term $\sim k^2$. Wie sich gleich zeigen wird, liefern alle weiteren $f_m(k)$ für $m>1$ nur Gaußsche Terme $\sim k^2$.

Zur Berechnung der weiteren Integrale kann die Exponentialfunktion $\exp(i k e_m \cos\vartheta_m/r_m^2)$ bis zu Gliedern $\sim k^2$ entwickelt werden. Man hat daher

$$\prod_{m=2}^{N\to\infty} f_m(k) = \underset{(N-1)}{\int\cdots\int}\left\{1+ik\sum_{m=2}^{N}\frac{e_m\cos\vartheta_m}{r_m^2}-\frac{k^2}{2}\sum_{m=2}^{N}\frac{e_m^2\cos^2\vartheta_m}{r_m^4}\right.$$
$$\left.-\frac{k^2}{2}\sum_{l=2}^{N}\sum_{\substack{n=2\\ l\neq n}}^{N}\frac{e_l e_n}{r_l^2 r_n^2}\cos\vartheta_l\cdot\cos\vartheta_n+\cdots\right\}\cdot\prod_{m=2}^{N}\frac{(n V_m)^{m-1}}{(m-1)!}\cdot e^{-nV_m}\cdot n\,\mathrm{d}V_m \tag{18}$$

mit $\mathrm{d}V_m = 2\pi r_m^2\,\mathrm{d}r_m \sin\vartheta_m\,\mathrm{d}\vartheta_m$.

Der imaginäre Anteil in (18) verschwindet bei der Winkelintegration. Die Summe der quadratischen Terme läßt sich leicht auswerten. Es ist ebenfalls unter Beachtung der Permutation der Teilchennumerierung

$$\sum_{m=2}^{N\to\infty}\underset{(N-1)}{\int\cdots\int}\frac{e_m^2\cos^2\vartheta_m}{r_m^4}\prod_{m=2}^{N}\frac{(n V_m)^{m-1}}{(m-1)!}e^{-nV_m}\,n\,\mathrm{d}V_m$$
$$=\frac{\langle e^2\rangle}{3}\left(\frac{4\pi n}{3}\right)^{4/3}\cdot\int_0^\infty \mathrm{d}x\,x^{-4/3}\cdot(1-e^{-x}) \tag{19}$$
$$=\langle e^2\rangle\left(\frac{4\pi n}{3}\right)^{4/3}\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

Der eigentlich interessante Anteil in (18) wird der aus Imaginärtermen entstandene Korrelationsterm sein, weil in ihm die Gruppierung von Ladungsträgern zu Raumladungen in größerem Abstand vom Aufpunkt zum Ausdruck kommt. Es soll hier in 1. Näherung ein Ausschließungsvolumen δV berücksichtigt werden, das einmal dadurch entsteht, daß sich die Ladungsträger auf Grund von Wechselwirkung einander nicht beliebig nähern oder gar gegenseitig durchdringen können, zum anderen aber auch mit Schwankungserscheinungen im Plasma zusammenhängen kann.

Das Plasma soll insgesamt elektrisch neutral sein, d.h. es gelte

$$\sum_{n=1}^{N} e_n = 0 \quad\text{oder}\quad \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N} e_n = -e_m. \tag{20}$$

Betrachtet man ein Glied der Doppelsumme in (18), so hat man unter Beachtung des Ausschließungsvolumens δV um $\boldsymbol{r}_l$

$$\underset{l\neq n}{e_l e_n}\underset{(N-1)}{\int\cdots\int}\frac{\cos\vartheta_l\cos\vartheta_n}{r_l^2 r_n^2}\prod_{m=2}^{N}\frac{(n V_m)^{m-1}}{(m-1)!}e^{-nV_m}\cdot n\,\mathrm{d}V_m$$
$$\cong e_l e_n\cdot\left\{0-n\,\delta V\int\frac{\cos^2\vartheta_l}{r_l^4}\cdot\frac{(n V_l)^{l-1+n-1}}{(l-1)!\,(n-1)!}e^{-2nV_l}\cdot n\,\mathrm{d}V_l\right\} \tag{21}$$
$$= -e_l e_n\frac{n\,\delta V}{3}\left(\frac{4\pi n}{3}\right)^{4/3}\cdot\frac{(l+n-10/3)!}{2^{l+n-7/3}(l-1)!\,(n-1)!} = -e_l e_n I_{ln}.$$

Beachtet man nun die Quasineutralität (20) und die Permutation der Numerierung, so hat man für den Korrelationsterm

$$\sum_{\substack{l=2\\l\neq n}}^{N}\sum_{n=2}^{N}\cdots=\sum_{l} e_l \sum_{m} e_m \sum_{\substack{n\\m\neq n}} I_{ln}=\sum_{l} e_l^2 \sum_{n} I_{ln}$$

$$=\langle e^2\rangle \frac{n\,\delta V}{3}\left(\frac{4\pi n}{3}\right)^{4/3}\sum_{\substack{l=2\\l\neq n}}^{N}\sum_{n=2}^{N}\frac{(l+n-10/3)!}{2^{l+n-7/3}(l-1)!\,(n-1)!}, \tag{22}$$

da in der 3-fachen $\sum$ im Mittel nur die Glieder mit $e_m = e_l$ beitragen.

Es ist mit $J_{(z)}$ als Bessel-Funktion

$$\sum_{\substack{l=2\\l\neq n}}^{N}\sum_{n=2}^{N\to\infty}\frac{(l+n-10/3)!}{2^{l+n-7/3}(l-1)!\,(n-1)!}=\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{-4/3}\cdot\left(1-2\,e^{-x}+2\,e^{-2x}-J_0(2\,i\,x)\,e^{-2x}\right)$$
$$=6\,\Gamma_{(2/3)}\cdot\left\{1-2^{1/3}+\frac{2^{1/3}}{3}\frac{\Gamma_{(2/3)}}{\Gamma^2_{(4/3)}}\right\}=3\,\Gamma_{(2/3)}\cdot 0{,}613 \tag{23}$$

und damit ergibt sich für den Ausdruck (18)

$$\prod_{m=2}^{N\to\infty} f_m(k)\cong 1-\tfrac{1}{2}\,k^2\langle e^2\rangle\left(\frac{4\pi n}{3}\right)^{4/3}\cdot\Gamma_{(2/3)}\cdot\left(1+0{,}613\,n\,\delta V\right). \tag{24}$$

Geht man nun für $N\to\infty$ zur Exponentialfunktion für die Fourier-Transformierte $f(k)$ über, so hat man mit (17) und (24)

$$f(k)=\exp\left\{-\frac{16\,\pi^{3/2}}{15\sqrt{2}}\langle|e|^{3/2}\rangle\,n\,k^{3/2}-\langle e^2\rangle\left(\frac{4\pi n}{3}\right)^{4/3}\cdot 0{,}415\,n\,\delta V k^2\right\}, \tag{25}$$

womit gezeigt ist, daß sich die Mikrofeldverteilung als Faltung einer Holtsmark- mit einer Gauß-Verteilung darstellt. Der Holtsmarksche Beitrag wird dabei gemäß Herleitung nur durch einen, und zwar den dem Aufpunkt im Mittel nächstbenachbarten Ladungsträger geliefert. Der Faktor von k^2 im Exponenten von (25) stellt auf Grund bekannter, für Gauß-Verteilungen gültiger Beziehungen 1/6 des mittleren Fernfeldquadrats dar. Die Größe $\langle e^2\rangle n\,\delta V$ bedeutet offenbar ein charakteristisches Ladungsquadrat, welches von den physikalischen Bedingungen des betrachteten Plasmas und somit im allgemeinen auch von der Temperatur abhängen wird; $n\,\delta V$ bedeutet entsprechend eine charakteristische Teilchenzahl, die im realen Plasma etwa von der Größenordnung der Zahl der Ladungsträger in einer Debye-Sphäre sein wird. Die Gestalt der Fourier-Transformierten zeigt, daß die Mikrofeldverteilung gegenüber der Holtsmark-Verteilung stets eine mehr oder weniger ausgeprägte Verbreiterung aufweisen sollte. Dies wird in Rechenmaschinen-Experimenten auch tatsächlich beobachtet [3, 4, 5, 6, 7].

4. Die Fernfeldeffekte in Abhängigkeit von der Gesamtteilchenzahl N im wechselwirkungsfreien Fall

Wie sich am Schluß des Abschnitts 3 herausgestellt hat, kommt es zur Ermittlung des Fernfeldanteils auf die Kenntnis der Wirkung der großräumigen Ladungsverteilung im Plasma an. Diese Raumladungen ergeben sich als Folge von Schwankungen der Teilchenzahldichten. In diesem Abschnitt sei ein insgesamt elektrisch neutrales, aus N betragsgleichen Ladungen bestehendes Plasma ohne Wechselwirkung untersucht, welches in einem Kugelvolumen $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ eingeschlossen ist. Ist die Gesamtteilchenzahl N in V fest und somit keinen Schwankungen unterworfen, so ergeben sich jedoch Schwankungen ΔN_p der Teilchenzahlen N_p im Volumenbereich $V_p=\frac{4}{3}\pi R_p^3$ um die mittlere Teilchenzahl $\langle N_p\rangle = N\,V_p/V$, wobei bekanntlich gilt $\langle\Delta N_p^2\rangle = \langle N_p\rangle$, wenn V_p bzw. N_p hinreichend klein gegen V bzw. N ist. Dem $\langle\Delta N_p^2\rangle$ entspricht dann ein mittleres Ladungsquadrat $\langle Q_p^2\rangle$ in V_p, welches sich aus den unabhängigen Schwankungen der positiven und negativen Ladungszahlen in bekannter Weise quadratisch zusammensetzt.

$$\begin{aligned}\langle Q_p^2\rangle &= e^2(\langle \Delta N_{p+}^2\rangle + \langle \Delta N_{p-}^2\rangle)\\ &= e^2(\langle N_{p+}\rangle + \langle N_{p-}\rangle) = e^2\langle N_p\rangle . \end{aligned}\tag{26}$$

Daneben gilt natürlich $\langle Q_p\rangle = 0$. Ist N_p bzw. V_p nicht mehr klein gegen N bzw. V, so ist wegen sicherer Anwesenheit der Komplementärladung bzw. der Komplementärteilchenzahl in $V - V_p$ der Korrekturfaktor $1 - V_p/V = 1 - \langle N_p\rangle/N$ anzubringen, d.h. es gilt allgemein

$$\begin{aligned}\langle \Delta N_p^2\rangle &= \frac{1}{e^2}\langle Q_p^2\rangle = \langle N_p\rangle \cdot (1 - V_p/V)\\ &= \langle N_p\rangle \cdot (1 - \langle N_p\rangle/N) . \end{aligned}\tag{27}$$

Es erhebt sich nun die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Volumen V in dichtliegende und sich nicht überdeckende Untervolumina V_p eingeteilt angetroffen wird derart, daß die in V_p auftretenden $\langle \Delta N_p^2\rangle$ groß gegen 1 sind, damit die in V_p befindliche Ladung Q_p als in V_p kontinuierlich verteilt angesehen werden kann. Läßt man ein kleinstes Volumen $V_1 = V/\nu$ mit $N_1 = N/\nu \gg 1$ zu, dann werden sich die übrigen Volumina in Klassen vom p-fachen ($p = 1, 2, 3 \ldots \nu$) Volumen $V_p = pV_1 = pV/\nu$ einordnen lassen und es muß gelten

$$\sum_{p=1}^{\nu} n_p V_p = \sum_{p=1}^{\nu} n_p p V_1 = V = \nu V_1$$

$$\text{oder} \quad \sum_{p=1}^{\nu} p\, n_p \langle N_1\rangle = N = \nu \langle N_1\rangle \tag{28}$$

$$\text{bzw.} \quad \sum_{p=1}^{\nu} p\, n_p = \nu ,$$

wenn n_p die Zahl der Volumina der Größe V_p angibt.

Zu fragen ist jetzt nach der Wahrscheinlichkeit $W_\nu(n_p)$, n_p Volumina V_p anzutreffen, wenn die Klassenzahl ν vorgegeben ist und der Bedingung (28) genügt werden muß. Diese geometrische Fragestellung ist genau analog derjenigen der Bose-Einstein-Statistik, wobei n_p der Zahl der besetzten Phasenzellen, $V_p = pV_1$ der der jeweiligen Phasenzelle zuzuordnenden Energie und V der Gesamtenergie entspricht. Man kann daher hier unter Verzicht auf die Herleitung (im Anhang II skizziert) sogleich die Formeln der Bose-Einstein-Statistik übernehmen. Es ergibt sich

$$W_\nu(n_p) = \frac{e^{-3pn_p/\nu}}{\sum\limits_{n_p=0}^{\nu/p} e^{-3pn_p/\nu}} = \frac{1 - e^{-3p/\nu}}{1 - e^{-3(1+p/\nu)}} \cdot e^{-3pn_p/\nu} \tag{29}$$

Die mittlere Besetzungszahl $\langle n_p\rangle$, die proportional der Wahrscheinlichkeit $W_\nu(V_p)$ ist, in V das Volumen $V_p = (p/\nu)\,V$ anzutreffen, ergibt sich dann in bekannter Weise zu

$$\begin{aligned}\langle n_p\rangle &= \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial p}\ln\frac{1 - e^{-3p/\nu}}{1 - e^{-3(1+p/\nu)}}\\ &= \frac{1 - e^{-3}}{1 - e^{-3(1+p/\nu)}} \cdot \frac{e^{-3p/\nu}}{1 - e^{-3p/\nu}} \end{aligned}\tag{30}$$

und mit $\nu \gg 1$

$$W_\nu(V_p) \sim \langle n_p\rangle = \frac{1}{e^{3p/\nu} - 1} . \tag{31}$$

Zur Anwendung vorstehender Ausdrücke bedarf es noch der Festlegung der Gesamtklassenzahl ν. Dies geschieht durch die Forderung, daß zwei in der Größe benachbarte Volumina V_p, V_{p+1} mit den mittleren Teilchenzahlen $\langle N_p\rangle = (p/\nu)N$, $\langle N_{p+1}\rangle = [(p+1)/\nu]N$ trotz zufälliger Schwankungen ΔN_p, ΔN_{p+1} ihrer Teilchenzahlen deutlich voneinander unterscheidbar sein müssen. Demnach muß verlangt werden

$$\langle N_{p+1}\rangle - \langle \Delta N_{p+1}^2\rangle^{1/2} \geqq \langle N_p\rangle + \langle \Delta N_p^2\rangle^{1/2} \tag{32}$$

für alle p zwischen 1 und ν; d.h. unter Beachtung von (27)

$$\begin{aligned}&\frac{p+1}{\nu}N - \left(\frac{p+1}{\nu}N\left(1 - \frac{p+1}{\nu}\right)\right)^{1/2}\\ &\geqq \frac{p}{\nu}N + \left(\frac{p}{\nu}N\left(1 - \frac{p}{\nu}\right)\right)^{1/2} . \end{aligned}\tag{33}$$

Daraus folgt sofort

$$\begin{aligned}\left(\frac{N}{\nu}\right)^{1/2} &\geqq \left((p+1)\left(1 - \frac{p+1}{\nu}\right)\right)^{1/2} + \left(p\left(1 - \frac{p}{\nu}\right)\right)^{1/2}\\ &\cong 2\left(p\left(1 - \frac{p}{\nu}\right)\right)^{1/2} \leqq \nu^{1/2} , \end{aligned}\tag{34}$$

wobei das $\leqq$ Zeichen durch das Maximum von $p(1 - p/\nu)$ bei $p = \nu/2$ bedingt wird. Es ergibt sich also für die Klassenzahl $\nu \gg 1$

$$\nu = V/V_1 = N/\langle N_1\rangle = N^{1/2} = \langle N_1\rangle . \tag{35}$$

Nach diesen Vorbereitungen lassen sich nun kollektive Feldwirkungen berechnen. Die Volumina V_p erzeugen mit ihrer in V_p näherungsweise homogen verteilten Ladung Q_p am Aufpunkt im Kugelzentrum von V eine Feldstärke $\boldsymbol{E}_{pi}$, wobei der Index i die Nummer des Volumens von der Größe V_p am Orte $\boldsymbol{r}_{pi}$ bezeichnen soll ($i = 1, 2, 3 \ldots \nu/p$). Es ist

$$\boldsymbol{E}_{pi} = Q_{pi}\frac{\boldsymbol{r}_{pi}}{r_{pi}} \cdot g_{pi}(r_{pi}) \tag{36}$$

$$\text{mit} \qquad g_{pi} = \begin{cases} 1/r_{pi}^2 \\ r_{pi}/R_p^3 \end{cases} \quad \text{für} \quad r_{pi} \gtrless R_{pi} = R_p .$$

Die Einführung der Funktion g_{pi} ist notwendig, um der aus der Elektrostatik geläufigen Fallunterscheidung gerecht zu werden, je nachdem, ob der Aufpunkt außerhalb oder innerhalb von V_{pi} bzw. Q_{pi} liegt.

Das mittlere Fernfeldquadrat $\langle E_{\mathrm{K}}^2 \rangle$, welches die Ladungen Q_{pi} kollektiv am Aufpunkt im Kugelzentrum erzeugen, schreibt sich

$$\begin{aligned}\langle E_{\mathrm{K}}^2 \rangle &= \left\langle \left(\sum_{p=1}^{\nu} \sum_i Q_{pi} \frac{\boldsymbol{r}_{pi}}{r_{pi}} \cdot g_{pi} \right)^2 \right\rangle \\ &= \sum_p \langle \sum_i \langle Q_{pi}^2 \rangle \langle g_{pi}^2 \rangle \rangle \qquad (37) \\ &+ \langle \sum_p \sum_i \sum_q \sum_j Q_{pi} Q_{qj} \cdot \cos \vartheta_{piqj} \cdot g_{pi} g_{qj} \rangle . \\ & \quad {\scriptstyle p,i \neq q,j}\end{aligned}$$

Der Korrelationsterm in (37) liefert einen Beitrag, weil die Ladungen wegen der Bedingung der Gesamtneutralität nicht unabhängig voneinander sind und weil sich ferner die Volumina V_{pi} nicht gegenseitig überdecken. Letzteres muß bei der räumlichen Mittelung über $\boldsymbol{r}_{qj}$ beachtet werden. Mit dem Ausschließungsvolumen ΔV_{pq} hat man in 1. Näherung

$$\begin{aligned}&\langle \cos \vartheta_{piqj} \cdot g_{pi}(r_{pi}) \cdot g_{qj}(r_{qj}) \rangle_{r_{qj}} \\ &\quad = 0 - \frac{\Delta V_{pq}}{V} g_{pi}(r_{pi}) \cdot g_{qj}(r_{pi}) , \qquad (38)\end{aligned}$$

wobei wegen $R_{pi} = R_p$ gilt

$$\Delta V_{pq} = \tfrac{4}{3} \pi (R_p + R_q)^3 \quad \text{für } \tfrac{4}{3} \pi (R_p + R_q)^3 < V - V_p . \qquad (39)$$

Da das Ausschließungsvolumen ΔV_{pq} selbstverständlich nicht größer als das Volumen V sein kann, gilt jedoch

$$\Delta V_{pq} = V - V_p \quad \text{für } \tfrac{4}{3} \pi (R_p + R_q)^3 > V - V_p . \qquad (40)$$

Nun ist $g_{pi}(r) = g_p(r)$ und weiter gilt die Identität

$$\begin{aligned}\Delta V_{pq} \cdot g_p(r) \cdot g_q(r) &\equiv \Delta V_p \cdot g_p^2 \qquad (41) \\ &- g_p \cdot (\Delta V_p \cdot g_p - \Delta V_{pq} \cdot g_q) .\end{aligned}$$

Hierin soll

$$\begin{aligned}&\Delta V_p = \tfrac{4}{3} \pi (2 R_p)^3 = 8 V_p \\ &\text{bzw.} \quad \Delta V_p = V - V_p \quad \text{für} \quad 8 V_p \lesseqgtr V - V_p \qquad (42)\end{aligned}$$

bedeuten. Der Klammerterm in (41) kann je nach der Größe von R_p im Verhältnis zu R_q beiderlei Vorzeichen haben; er mittelt sich daher in der 4-fachen Summe von (37) weitgehend heraus.

Beachtet man nun die Gesamtneutralität

$$\sum_q \sum_j Q_{qj} = - Q_{pi} , \quad q, j \neq p, i , \qquad (43)$$

so ergibt sich jetzt

$$\langle E_{\mathrm{K}}^2 \rangle = \sum_{p=1}^{\nu} \langle \sum_i \langle Q_{pi}^2 \rangle \langle g_p^2 \rangle \rangle + \sum_{p=1}^{\nu} \langle \sum \langle Q_{pi}^2 \rangle \frac{\Delta V_p}{V} \langle g_p^2 \rangle \rangle \qquad (44)$$

und mit $\langle Q_{pi}^2 \rangle = \langle Q_p^2 \rangle$ sowie unter Beachtung von (42) und weiter von

$$\langle \sum_i X_p \rangle = \langle n_p \rangle X_p \qquad (45)$$

schließlich

$$\langle E_{\mathrm{K}}^2 \rangle = \sum_{p=1}^{\nu} \langle n_p \rangle \langle Q_p^2 \rangle \langle g_p^2 \rangle \cdot \left(1 + \frac{8 V_p / V}{1 - V_p / V} \right) \quad \text{für} \quad 9 V_p \lesseqgtr V . \qquad (46)$$

Mit der Definition von g_p nach (36) hat man

$$\begin{aligned}\langle g_p^2 \rangle &= \frac{4 \pi}{V} \left(\int_0^{R_p} \frac{r^2 r^2 \, \mathrm{d}r}{R_p^6} + \int_{R_p}^{R} \frac{r^2 \, \mathrm{d}r}{r^4} \right) \qquad (47) \\ &= \frac{3 \cdot 6}{5 R^3 R_p} - \frac{3}{R^4} = \frac{18}{5 R^4} \left[\left(\frac{\nu}{p} \right)^{1/3} - \frac{5}{6} \right] ,\end{aligned}$$

da $V_p = \tfrac{4}{3} \pi R_p^3 = (p/\nu) V = (p/\nu) \cdot \tfrac{4}{3} \pi R^3$ gilt.

Werden nun die Ausdrücke für $\langle n_p \rangle$ nach (31) und $\langle Q_p^2 \rangle$ nach (27) eingesetzt, so erhält man unter Beachtung von $\langle N_p \rangle = N p / \nu$

$$\langle E_{\mathrm{K}}^2 \rangle = \frac{e^2}{R^4} N \frac{18}{5} \left\{ \sum_{p=1}^{\nu} \frac{(p/\nu)(1 - p/\nu)}{e^{3 p/\nu} - 1} \cdot \left[\left(\frac{\nu}{p} \right)^{1/3} - \frac{5}{6} \right] \cdot \left(1 + \frac{8 p/\nu}{1 - p/\nu} \right) \right\} \quad \text{für} \frac{p}{\nu} \lesseqgtr \frac{1}{9} \qquad (48)$$

oder nach Ersetzung der $\sum$ durch ein Integral mit $x = p/\nu$ als Integrationsvariabler

$$\langle E_{\mathrm{K}}^2 \rangle = \frac{e^2}{R^4} N \nu \frac{18}{5} \left\{ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x (x^{2/3} - \frac{5}{6} x)(1 - x)}{e^{3x} - 1} + 8 \int_0^{1/9} \frac{\mathrm{d}x (x^{5/3} - \frac{5}{6} x^2)(1 - x)}{e^{3x} - 1} + \int_{1/9}^{1} \frac{\mathrm{d}x (x^{2/3} - \frac{5}{6} x)(1 - x)^2}{e^{3x} - 1} \right\} . \qquad (49)$$

Es ist

$$\{ \quad \} \cong 0{,}20 , \qquad (50)$$

wie man durch näherungsweise Auswertung der Integrale ermittelt.

Mit (35) hat man nun das Fernfeldquadrat in Abhängigkeit von der Gesamtteilchenzahl N in den beiden Formen

$$\langle E_K^2 \rangle = \frac{e^2}{R^4}\frac{18}{5}\,0{,}20\,N^{3/2}$$
$$= e^2\left(\frac{4\pi n}{3}\right)^{4/3}\cdot\frac{18}{5}\,0{,}20\,N^{1/6}, \tag{51}$$

wobei $n = N/V$ die Teilchendichte bedeutet. $\langle E_K^2 \rangle$ nimmt also im Verhältnis zum Quadrat des mittleren Holtsmarkschen Nahfeldes mit der 6. Wurzel aus der Teilchenzahl N zu. Dies sollte gegebenenfalls im Experiment nachprüfbar sein.

Die abgeleiteten Ausdrücke gelten unter der Voraussetzung, daß die Klassenzahl $\nu = N^{1/2} \gg 1$ und andererseits wegen der als kontinuierlich verteilt behandelten Ladungen

$$1/e\,\langle Q_1^2\rangle^{1/2} = \langle N_1\rangle^{1/2} = \nu^{1/2} \gg 1$$

zutrifft. Nimmt man $\langle N_1 \rangle$ bzw. ν zu minimal etwa 20 an, so folgt, daß die Rechnungen für Teilchenzahlen $N \gtrsim 400$ gelten sollten.

Analog dem Fernfeldquadrat kann man auch das kollektiv zustande kommende mittlere Potentialquadrat $\langle \varphi_K^2 \rangle$ am Aufpunkt in Abhängigkeit von N berechnen. Hier gilt

$$\varphi_{pi} = Q_{pi}\cdot g_{pi}(r_{pi}) \tag{52}$$

mit $$g_{pi} = \begin{cases} 1/r_{pi} \\ \dfrac{1}{2R_p}\left(3 - \dfrac{r_{pi}^2}{R_p^2}\right)\end{cases} \quad \text{für} \quad r_{pi} \gtrless R_p,$$

und es ist

$$\langle g_p \rangle = \frac{4\pi}{V}\left(\int_0^{R_p}\frac{r^2\,\mathrm{d}r}{2R_p}\left(3 - \frac{r^2}{R_p^2}\right) + \int_{R_p}^{R} r\,\mathrm{d}r\right)$$
$$= \frac{3}{2R}\left(1 - \frac{R_p^2}{5R^2}\right) \cong \frac{3}{2R}, \tag{53}$$

$$\langle g_p^2 \rangle = \frac{4\pi}{V}\left(\int_0^{R_p}\frac{r^2\,\mathrm{d}r}{4R_p^2}\left(3 - \frac{r^2}{R_p^2}\right)^2 + \int_{R_p}^{R}\mathrm{d}r\right)$$
$$= \frac{3}{R^2}\left(1 - \frac{18}{35}\frac{R_p}{R}\right). \tag{54}$$

$\langle \varphi_K^2 \rangle$ ist also zu schreiben:

$$\langle \varphi_K^2 \rangle = \sum_p \langle n_p \rangle \langle Q_p^2 \rangle \langle g_p^2 \rangle$$
$$+ \langle \sum_p \sum_i \sum_q \sum_j{}_{\,p,i \neq q,j}\; Q_{pi}\,Q_{qj}\,g_{pi}\,g_{qj} \rangle. \tag{55}$$

Unter Beachtung des Ausschließungsvolumens hat man bei der Mittelung über $\boldsymbol{r}_{qj}$

$$g_{pi}\cdot\langle g_{qj}\rangle_{r_{qj}} = g_{pi}\langle g_{qj}\rangle - \frac{\Delta V_{pq}}{V}\,g_{pi}(r_{pi})\cdot g_{qj}(r_{pi})$$
$$\equiv g_{pi}\langle g_q \rangle - \frac{\Delta V_p}{V}\,g_p^2 \tag{56}$$
$$+ \frac{g_p}{V}\,(\Delta V_p g_p - \Delta V_{pq} g_q),$$

wobei sich der Klammerterm in (56) entsprechend der Bemerkung zu (41) herausmittelt. Ersichtlich ist nach (53)

$$\langle g_{pi} \rangle \cong \langle g_{qj} \rangle \cong \langle g \rangle = \frac{3}{2R},$$

so daß sich nach Einführung der elektrischen Gesamtneutralität gemäß (43) in Analogie zur vorherigen Rechnung ergibt

$$\langle \varphi_K^2 \rangle = \sum_{p=1}^{\nu}\langle n_p\rangle\langle Q_p^2\rangle\left[\langle g_p^2\rangle - \langle g\rangle^2 + \langle g_p^2\rangle\left(\frac{8\,V_p/V}{1 - V_p/V}\right)\right] \text{für} \quad 9\,V_p \lesssim V \tag{57}$$

oder in Integralform nach Einführung der entsprechenden Ausdrücke

$$\langle \varphi_K^2 \rangle = \frac{e^2}{R^2}N\nu\cdot 3\left\{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x\,x(1-x)\left(\frac{1}{4} - \frac{18}{35}x^{1/3}\right)}{e^{3x}-1} + 8\int_0^{1/9}\frac{\mathrm{d}x\,x^2(1-x)\left(1 - \frac{18}{35}x^{1/3}\right)}{e^{3x}-1} + \int_{1/9}^{1}\frac{\mathrm{d}x\,x(1-x)^2\left(1 - \frac{18}{35}x^{1/3}\right)}{e^{3x}-1}\right\}. \tag{58}$$

Es ist $$\{\quad\} \cong 0{,}040. \tag{59}$$

Mit $\nu = N^{1/2}$ ergibt sich also schließlich

$$\langle \varphi_K^2 \rangle = \frac{e^2}{R^2}\,3\cdot 0{,}040\,N^{3/2}$$
$$= e^2\cdot 4\pi n R\cdot 0{,}040\,N^{1/2}. \tag{60}$$

Gegenüber der hier durchgeführten Berechnung der kollektiven Wirkung von Ladungswolken würde eine Bestimmung von $\langle \varphi^2 \rangle$ für das neutrale Plasma mit $\sum^N e_m = 0$, welche nur die Wirkung der einzelnen Ladungsträger individuell erfaßt, folgendes Ergebnis haben

$$\langle \varphi_{\text{ind}}^2 \rangle = \left\langle \left(\sum_{m=1}^{N}\frac{e_m}{r_m}\right)^2 \right\rangle$$
$$= \sum_{m=1}^{N} e_m^2 \left\langle \frac{1}{r_m^2} \right\rangle + \sum_{l}^{N}\sum_{\substack{m \\ l\neq m}}^{N} e_l\,e_m \left\langle \frac{1}{r_l} \right\rangle \left\langle \frac{1}{r_m} \right\rangle$$
$$= \frac{e^2 N}{R^2}\left(3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = \frac{e^2}{R^2}\cdot\frac{3N}{4}. \tag{61}$$

Während (60) für $N > 400$ gelten sollte, müßte demnach für hinreichend große N der Unterschied zwischen (60) und (61) deutlich bemerkbar werden.

Wegen des in Abschnitt 2 erwähnten Zusammenhangs zwischen Fernfeld und Dipolmomentdichte ist auch das mittlere Dipolmomentdichtenquadrat $\langle m^2 \rangle$ von Interesse. Da die Rechnung jedoch weitgehend derjenigen für das Fernfeld gleicht, sei hier nur das Ergebnis mitgeteilt. Man erhält mit $\langle g_p^2 \rangle = \langle r_p^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2$ hier

$$\langle m_{\mathrm{K}}^2 \rangle = \frac{e^2}{R^4} N \frac{3}{5} \left\{ \sum_{p=1}^{\nu} \frac{(p/\nu)(1-p/\nu)}{e^{3p/\nu}-1} \left(1 + \frac{8p/\nu}{1-p/\nu}\right) \right\} \quad \text{für} \quad p/\nu \lesssim 1/9 \tag{62}$$

und nach Auswertung der Summe

$$\langle m_{\mathrm{K}}^2 \rangle = \frac{e^2}{R^4} \cdot \frac{3}{5}\, 0{,}18\, N^{3/2} = e^2 \left(\frac{4\pi n}{3}\right)^{4/3} \cdot \frac{3}{5}\, 0{,}18\, N^{1/6}. \tag{63}$$

Es gilt also (vgl. Anhang I)

$$\langle E_{\mathrm{K}}^2 \rangle \cong 6{,}7 \langle m_{\mathrm{K}}^2 \rangle. \tag{64}$$

Zum Schluß dieses Abschnitts sei noch der Bruchteil N_{K}/N der Ladungsträger abgeschätzt, der im Mittel effektiv zum Fernfeld beiträgt. Dieser Bruchteil wird mit den mittleren Ladungsquadraten $\langle Q_p^2 \rangle$ zusammenhängen, so daß sich für N_{K}/N der folgende Ausdruck angeben läßt

$$\left(\frac{N_{\mathrm{K}}}{N}\right)^2 = \frac{1}{e^2 N^2} \sum_{p=1}^{\nu} n_p \langle Q_p^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{\nu} n_p \frac{p}{\nu}\left(1 - \frac{p}{\nu}\right) \cong \frac{1}{N}.$$

Bis auf den Korrekturfaktor $1 - p/\nu$ ist die letztere $\sum$ gemäß Gl. (28) gleich 1, so daß $N/N_{\mathrm{K}} \cong 1/\sqrt{N}$ folgt, d.h. trotz mit N zunehmenden Fernfeldes nimmt der Bruchteil der wirksamen Ladungsträger ab. Die Größe N_{K}/N ließe sich evtl. als Maß für die Nichtergodizität verwenden. Wird mit $N \to \infty$ die Abweichung vom ergodischen Verhalten des Systems beliebig klein, so bleibt im Sinne der im Abschnitt 2 gemachten Ausführungen trotzdem ein Fernfeldeffekt übrig.

5. Schlußbemerkungen. Zum Plasma mit Wechselwirkung

Nach den Ergebnissen des Abschnitts 4 erhebt sich die Frage, welche Größenordnung für die Teilchenzahl N in das kollektive Fernfeldquadrat nach Gl. (51) im Falle eines realen Plasmas mit Wechselwirkung einzusetzen ist.

Volle Wechselwirkung unter den Ladungsträgern besteht offenbar nur dann, wenn das Plasma räumlich so ausgedehnt ist, daß es nicht mehr als Knudsen-Gas bezeichnet werden muß. Damit dies der Fall ist, müssen die Berandungen des Plasmas so weit voneinander entfernt sein, daß auch relativ schnelle Teilchen (mit Geschwindigkeiten merklich oberhalb der thermischen Geschwindigkeit) zwischen den Berandungen mit einiger Wahrscheinlichkeit einen Stoß in Form eines nahen Vorübergangs mit starker Ablenkung erleiden können, m.a.W. die Ausdehnung des Plasmas muß sehr viele Relaxationslängen betragen. Die freie Weglänge λ für enge Stöße ist der Größenordnung nach bekanntlich durch das reziproke Produkt von Landauquerschnitt und Dichte oder auch durch das Produkt von Dichte und zur vierten Potenz erhobener Debye-Länge D gegeben.

$$\lambda \sim (e^2/k\,T)^{-2} \cdot n^{-1} \sim n\,D^4 \sim (k\,T)^2/e^4 n. \tag{65}$$

Wählt man nun als Teilchenzahl N diejenige Zahl von Teilchen, die sich in einem Gebiet von den Dimensionen der Länge λ befindet,

$$N \sim \lambda^3 \tag{66}$$

d.h., wählt man die Dimensionen des Gebiets nicht größer als die von Ladungsträgern äußerstenfalls näherungsweise geradlinig durchlaufene Strecke (vgl. verwandte Überlegungen bei LEE [14]), so ergibt sich die in der Arbeit [2] hergeleitete Proportionalität des mittleren Mikrofeldquadrats zur Temperatur T. Die in (51) eingehende Größe $N^{1/6}$ stellt dann gemäß (65) und (66) abgesehen von Zahlenfaktoren nichts anderes dar als den Plasmaparameter $k\,T/e^2 n^{1/3}$.

Daß die freie Weglänge λ für enge Stöße hier als charakteristische begrenzende Dimension auftritt, wird durch Betrachtung der Lebensdauer von bewegten Raumladungswolken verständlich. Bilden Ladungsträger etwa gleichgerichteter und gleichgroßer Geschwindigkeit eine Raumladungswolke, so hört diese Wolke spätestens zu existieren auf, wenn die Ladungsträger nach Durchlaufen der Strecke λ durch enge Stöße großenteils zerstreut worden sind. Bei kurzzeitiger Beobachtung ist das Plasma also erst über Dimensionen von der Größenordnung λ elektrisch neutral, bei langzeitiger Mittelung natürlich schon über Dimensionen von der Größe der Debye-Länge. Daß die Debye-Abschirmung meist sehr überschätzt wird, zeigen MONTGOMERY, JOYCE und SUGIHARA [15].

[14] E. P. LEE, Astrophys. J. **151**, 687 [1968].
[15] D. MONTGOMERY, G. JOYCE, and RYO SUGIHARA, Plasma Physics **10**, 681 [1968].

Die Proportionalität des Fernfeldquadrats zu $N^{1/6}$ gemäß (51) läßt sich mit (65) und (66) so interpretieren, daß tatsächlich nur der geometrische Mittelwert aus dem Produkt von λ mit dem mittleren Teilchenabstand eingeht; das bedeutet, daß die wesentlichen Feldbeiträge aus Entfernungen von der Größenordnung einiger Debye-Längen kommen. $N^{1/6}$ oder $k\,T/e^2 n^{1/3}$ ist, wie man sich leicht überzeugt, von der Größenordnung der Zahl der Teilchen in einer Debye-Kugel; entsprechend den Ausführungen am Schluß von Abschnitt 3 gilt das gleiche von der dort eingeführten Größe $n\,\delta V$, die offenbar für $n\,\delta V > 1$ ebenfalls als zu $k\,T/e^2 n^{1/3}$ proportional anzusehen ist.

Anhang I

Fernfeld und Dipolmomentdichte

Wird eine Raumladungsverteilung ϱ mit Hilfe einer Entwicklung nach Kugelfunktionen dargestellt

$$\varrho(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \varrho_{lm}(r) \cdot P_l^m(\cos\vartheta) \cdot e^{im\varphi}, \quad (\mathrm{I}^1)$$

so sind zur Bestimmung der Feldstärke $\boldsymbol{E}$ am Orte $\boldsymbol{r}=0$ und des auf diesen Punkt bezogenen Dipolmoments $\boldsymbol{M}$ nur die Funktionen ϱ_{10} und ϱ_{11} von Interesse. Geht man zur Dipolmomentdichte $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{M}/R^3$ über, so hat man

$$\begin{aligned}\begin{matrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{m}\end{matrix} &= \int \mathrm{d}V\, \boldsymbol{r}\, \varrho(\boldsymbol{r}) \cdot \begin{pmatrix} r^{-3} \\ R^{-3} \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{I}^2)\\ &= \frac{8\pi}{3} \int_0^R \mathrm{d}r \begin{pmatrix} 1 \\ (r/R)^3 \end{pmatrix} \cdot \{\mathrm{Re}\,\varrho_{11}(r);\, -\mathrm{Im}\,\varrho_{11}(r);\, \tfrac{1}{2}\varrho_{10}(r)\}.\end{aligned}$$

Es gilt daher ersichtlich $\boldsymbol{m} \to \boldsymbol{E}$, wenn entfernte Ladungen den Hauptbeitrag zum Integral liefern.

Anhang II

Zur Realisierungsmöglichkeit der Unterteilung einer Kugel in sphärische Untervolumina

Gemäß der Bedingung (28) von Abschnitt 4 hat man mit Hilfe der Markoff-Methode die nichtnormierte Wahrscheinlichkeit $W_\nu(n_p)$ aus

$$\begin{aligned} W_\nu(n_p) &\sim \prod_{q=1}^{\nu} \sum_{s_q=0}^{\nu/q} \delta\Big(\sum_{q=1}^{\nu} q\, s_q - \nu\Big) \cdot \delta(n_p - s_p) \\ &\sim \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \mathrm{d}l \prod_{q=1}^{\nu} \sum_{s_q=0}^{\nu/q} \exp\{i\,l\,(\sum_{q=1}^{\nu} q\, s_q - \nu) \qquad (\mathrm{II}^1)\\ &\quad + i\,k\,(n_p - s_p)\} \end{aligned}$$

zu ermitteln. Nach Ausführung der $\sum$ über s_q unter Beachtung des Falles $q = p$ hat man

$$\begin{aligned} W_\nu(n_p) &\sim \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \mathrm{d}l\, e^{i k n_p - i l \nu} \\ &\cdot \frac{e^{i(lp-k)(\nu/p+1)} - 1}{e^{i(lp-k)} - 1} \prod_{\substack{q=1\\ q \neq p}}^{\nu} \frac{e^{il(\nu+q)} - 1}{e^{ilq} - 1}. \qquad (\mathrm{II}^2) \end{aligned}$$

Mit Ausführung der k-Integration ergibt sich für $n_p = 0, 1, 2, \ldots \nu/p$ nach Umformung des Produkts

$$W_\nu(n_p) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}l\, e^{il(p n_p - \nu)} \prod_{q=1}^{\nu} e^{il\nu/2} \cdot \frac{\sin l(\nu+q)/2}{\sin l q/2}. \quad (\mathrm{II}^3)$$

Wendet man auf das sin-Produkt für $\nu \gg 1$ den Satz über Funktionen mit gemeinsamen Maximum an, dann geht (II³) über in

$$\begin{aligned} W_\nu(n_p) &\sim \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}l \exp\Big\{il\Big(p\, n_p + \frac{\nu}{2}(\nu - 3)\Big) \\ &\qquad - \frac{l^2}{12}\nu^3 (1 - p^2/\nu^2)\Big\} \qquad (\mathrm{II}^4)\\ &\to \exp\Big\{-\frac{3p}{\nu} n_p - \frac{1}{3\nu}\Big(\frac{3p}{\nu} n_p\Big)^2\Big\} \end{aligned}$$

und führt für $\nu \gg 1$ mit Normierung versehen zu (29) in Abschnitt 4.